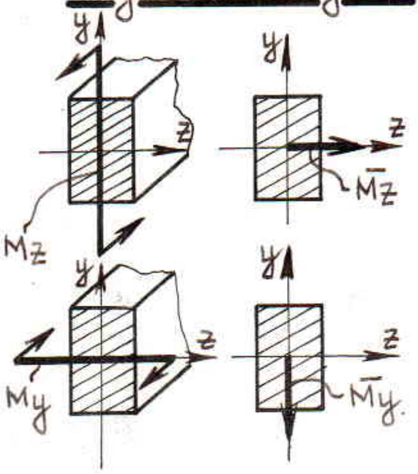
FLEXION DEVIEE

On dit qu'une poutre travaille à la flexion deviée, lorsque le plan de charge ne coïncide pas avec les plans principaux de la section normale. Il est commode de considérer la flexion deviée comme la superposition de deux flexions agissants dans les plans principaux (xy, xz)
le principe de superposition s'applique à tous les cas où les déformations sont petites et le materiaux obeit à la loi de HOOKE.

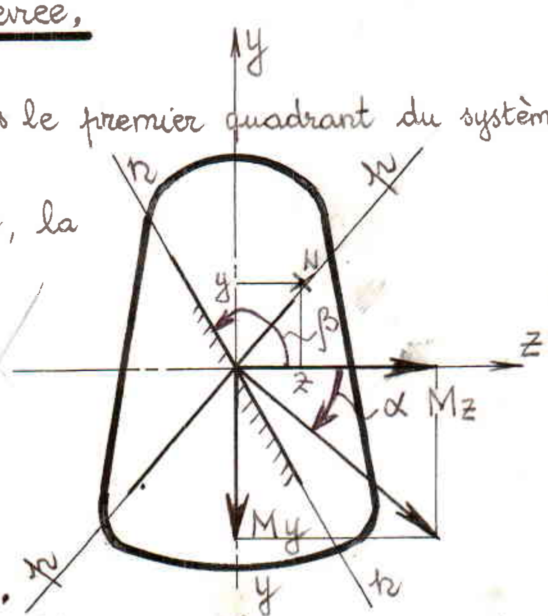
Regle des signes:



les moments fléchissants M_z et M_y peuvent être représentés par des vecteurs $\bar{M}_z$ et $\bar{M}_y$.

le vecteur moment $\bar{M}_{y,z}$ est dirigé de façon à ce qu'on regardant de la pointe de ce vecteur, on voit le moment dirigé dans le sens opposé des aiguilles d'une montre.
le moment M est pris comme positif si les fibres tendues provoquées par ce moment se trouvent dans le premier quadrant du systeme de coordonnées choisi.
Dans le cas considéré ci-dessus M_y et M_z sont positifs.

Contraintes normales en flexion deviée,



Considérons un point "N" arbitraire dans le premier quadrant du système de coordonnées "y,z".
En vertu du principe de superposition, la contrainte normale en ce point est:

$$\sigma_x^N = \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

I_y, I_z: sont les moments d'inerties centraux de la section.
y, z: coordonnées du point considérée.
Habituellement on s'interesse aux contraintes maximales qui apparaissent aux points les plus éloignés de l'axe neutre. Alors il faut d'abord déterminer la position de l'axe neutre.
la position de l'axe neutre est determinée par la condition

$$\sigma_x = 0 \implies \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z = 0 \implies y = -\frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{I_z}{M_z} \cdot z$$

C'est l'equation de la ligne neutre passant par l'origine des coordonnées "nn"

pp : est la trace du plan des moments fléchissants.
Désignons par:

$$tg\,\beta = -\frac{M_y}{I_y}\cdot\frac{I_z}{M_z} \quad \text{et} \quad tg\,\alpha = \frac{M_z}{M_y}$$

Si les droites "nn" et "pp" sont perpendiculaires alors:

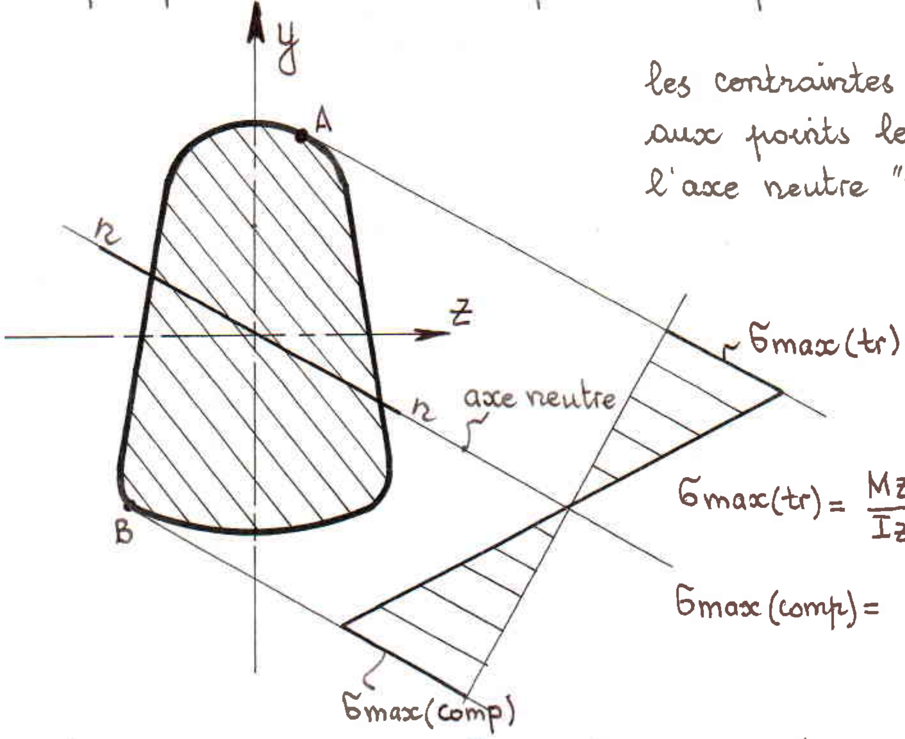
$$tg\,\alpha \cdot tg\,\beta = -\frac{I_z}{I_y} = -1 .$$

$I_z = I_y$, $\alpha = \beta$ et la flexion déviée devient la flexion simple.

Si les droites "nn" et "pp" ne sont pas perpendiculaires :

$$tg\,\alpha \cdot tg\,\beta = -\frac{I_z}{I_y} \neq -1$$

$I_z \neq I_y$ par conséquent l'axe neutre n'est pas perpendiculaire au plan de charge.
Il faut noter que la position de la ligne neutre n'est ~~pas~~ nécéssaire que pour déterminer les positions des points les plus tendus.



les contraintes maximales apparaissent aux points les plus éloignés de l'axe neutre "nn".

$$\sigma_{max}(tr) = \frac{M_z}{I_z}\cdot y_A + \frac{M_y}{I_y}\cdot z_A$$

$$\sigma_{max}(comp) = \frac{M_z}{I_z}\cdot y_B + \frac{M_y}{I_y}\cdot z_B$$

Lorsqu'une poutre possède 2 plans de symétrie on résoud le problème par la méthode de superposition.
Dans le cas des barres à section circulaire, on ne détermine pas la position de l'axe neutre. Tous les axes ~~sont~~ centraux principaux.

Condition de résistance.

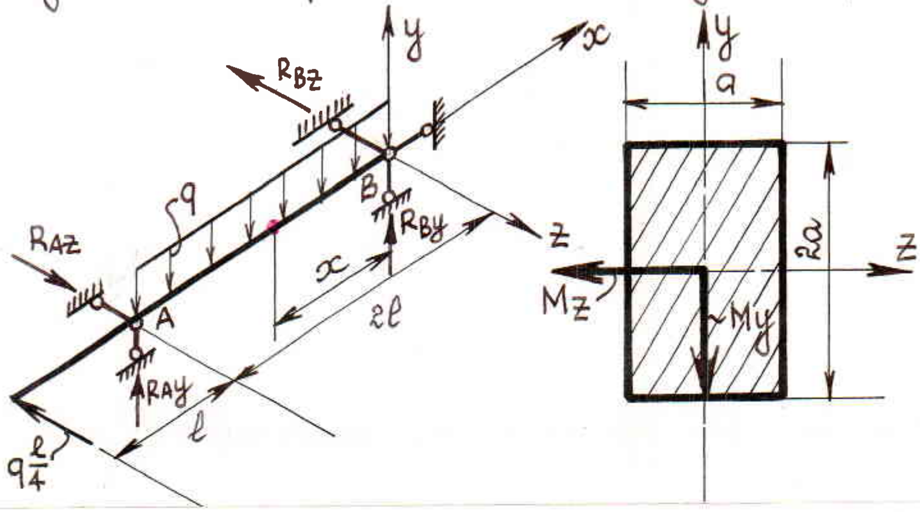
En flexion déviée on tient compte des conditions de résistance à la compression et à la traction.

$$\sigma_{max}(tr) \leq [\sigma]_{tr} \; ;$$

$$\sigma_{max}(comp) \leq [\sigma]_{comp} \; ;$$

Exercice : 1

Déterminer la position de la section dangereuse et la contrainte maximale agissant sur la poutre de section rectangulaire représentée par la figure.



Solution:

Calcul des réactions :

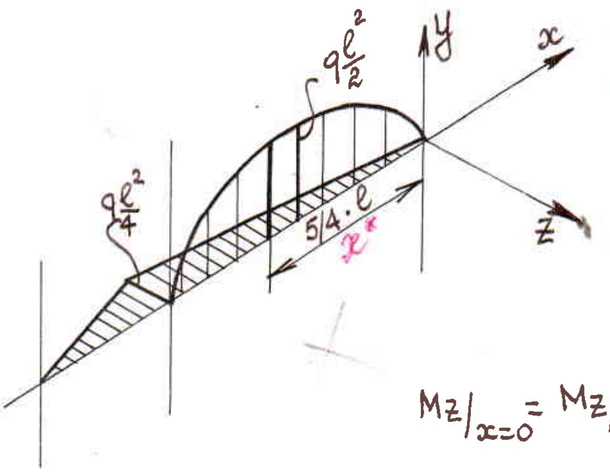
Nous déterminons les réactions par les équations d'équilibre.

$R_{Ay} = q.\ell$ $\qquad\qquad$ $R_{By} = q.\ell$

$R_{Az} = \frac{3}{8} q.\ell$ $\qquad\qquad$ $R_{Bz} = q.\frac{\ell}{8}$

le sens des réactions est indiqué sur la figure

Diagrammes des moments fléchissants.



$M_z = q\ell.x - q\frac{x^2}{2}$

M_z : comprime les fibres de la poutre se trouvant sur le premier quadrant du système de coordonnées choisi. Donc M_z est négatif, $M_z = -(q\ell x - q\frac{x^2}{2}) = q\frac{x^2}{2} - q\ell x$

le diagramme M_z est représenté ci-contre dans le plan "xy".

$$M_z|_{x=0} = M_z|_{x=2\ell} = 0$$

$$M_z^{max} = M_z|_{x=\ell} = -q\frac{\ell^2}{2}$$

M_y tend les fibres de la poutre sur le premier quadrant, M_y est positif ; $\quad M_y = q\frac{\ell}{8}.x \qquad M_y|_{x=0} = M_y|_{x=3\ell} = 0$

$$M_y|_{x=\ell} = q\frac{\ell^2}{4}$$

le diagramme M_y est représenté ci-dessus dans le plan "xz".

Contraintes normales:

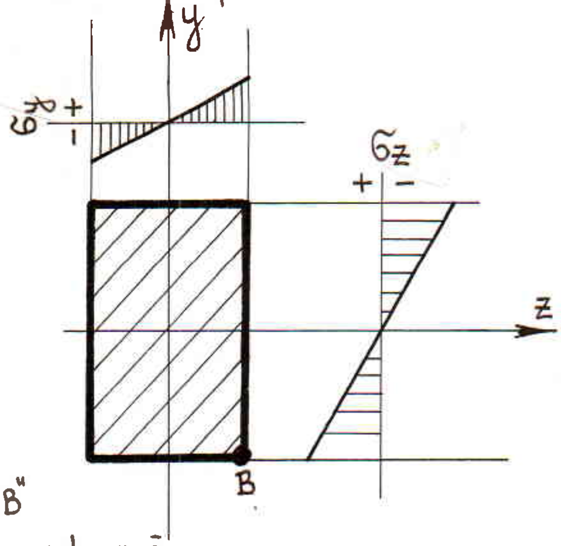
les contraintes normales sont données par l'expression ;

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z}.y + \frac{M_y}{I_y}.z$$

$$I_z = \frac{a.(2a)^3}{12} \quad ; \quad I_y = \frac{2a.a^3}{12}$$

La section de la poutre est rectangulaire à double symetrie. Le point le plus contraint est leplusloin des deux x axes, soit le point "B".

$B(-a, a/2)$



$$\sigma x/_B = \frac{q\frac{x^2}{2} - q\ell x}{\frac{a.(2a)^3}{12}} . (-a) + \frac{q\frac{\ell x}{8} \cdot \frac{a}{2}}{\frac{2a(a^3)}{12}}$$

$$\sigma x/_B = -\frac{3}{4} \cdot \frac{q}{a^3} \cdot \left(x^2 - \frac{5}{2}\ell x\right)$$

<u>Position de la section dangereuse.</u>

La contrainte est maximale au point "B" à la distance x^* de l'origine des coordonneés dérivons l'expression $\sigma x|_B$ par rapport à "x".

$$\frac{d\sigma x/B}{dx} = -\frac{4}{3}\frac{q^2}{a^3}\left(2x - \frac{5}{2}\ell\right)$$

$$\frac{d\sigma x/B}{dx} = 0 \implies -\frac{4}{3}\frac{q^2}{a^3}\left(2x^* - \frac{5}{2}\ell\right) = 0 \implies x^* = \frac{5}{4}.\ell$$

<u>la contrainte maximale:</u>

$$\sigma_{max} = \sigma_B\Big|_{x=x^*} = -\frac{3}{4}\frac{q^2}{a^3}\left(\frac{25}{16}\ell^2 - \frac{5}{2}.\ell.\frac{5}{4}\ell\right) = \frac{75}{64} \cdot \frac{q\ell^2}{a^3}$$

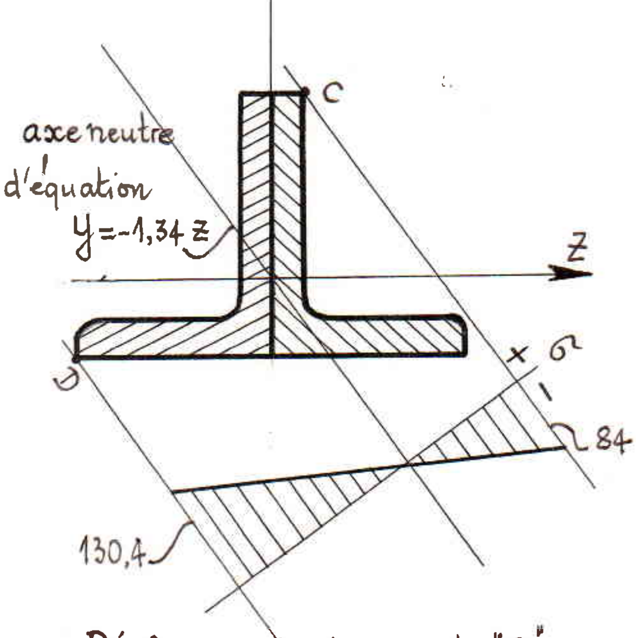
L'axe neutre change de position le long de l'axe de la barre "x", c'est l'axe incurvé.

La contrainte normale est maximale dans la section "B" au point "D".

le coefficient de sécurité c'est le rapport de la contrainte admissible sur la contrainte maximale.

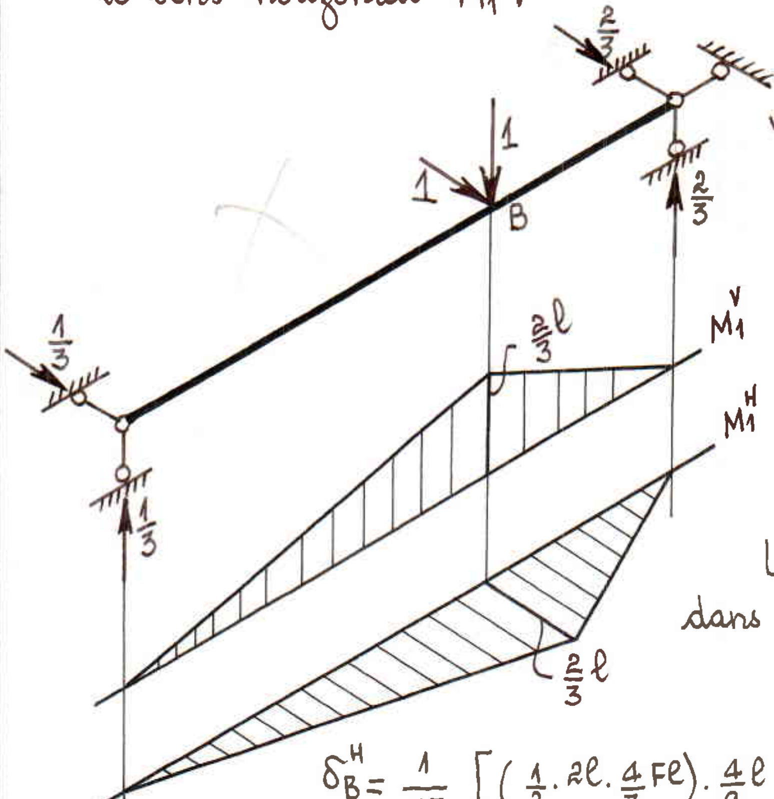
$$\sigma_{max} = \sigma_D = 130,4 \text{ MPa}$$

$$n_t = \frac{240}{130,4} = 1,84$$



Déplacement du point "B".

Utilisons la méthode de Verechtchaguine, construisons d'abord les moments fléchissants dûs à la force unitaire dans le sens vertical M_1^V et dans le sens horizontal M_1^H.



Le déplacement de "B" dans le sens vertical "δ_B^V":

$$\delta_B^V = M_z \times M_1^V$$

$$\delta_B^V = \frac{1}{EI_z}\left[\left(\frac{1}{2}\ell\,\frac{4}{3}F\ell\right)\cdot\frac{2}{9}\ell + \left(\frac{4}{3}F\ell.\ell\right)\cdot\frac{\ell}{2} + \left(\frac{1}{2}.\ell.\frac{1}{3}F\ell\right)\frac{5}{9}\ell - \left(\frac{1}{2}\ell.\frac{F\ell}{3}\right)\frac{4}{9}\ell\right] =$$

$$\delta_B^V = \frac{45}{54}\cdot\frac{F\ell^3}{EI_z}$$

le déplacement vertical de "B" dans le sens horizontal:

$$\delta_B^H = M_y \times M_1^H$$

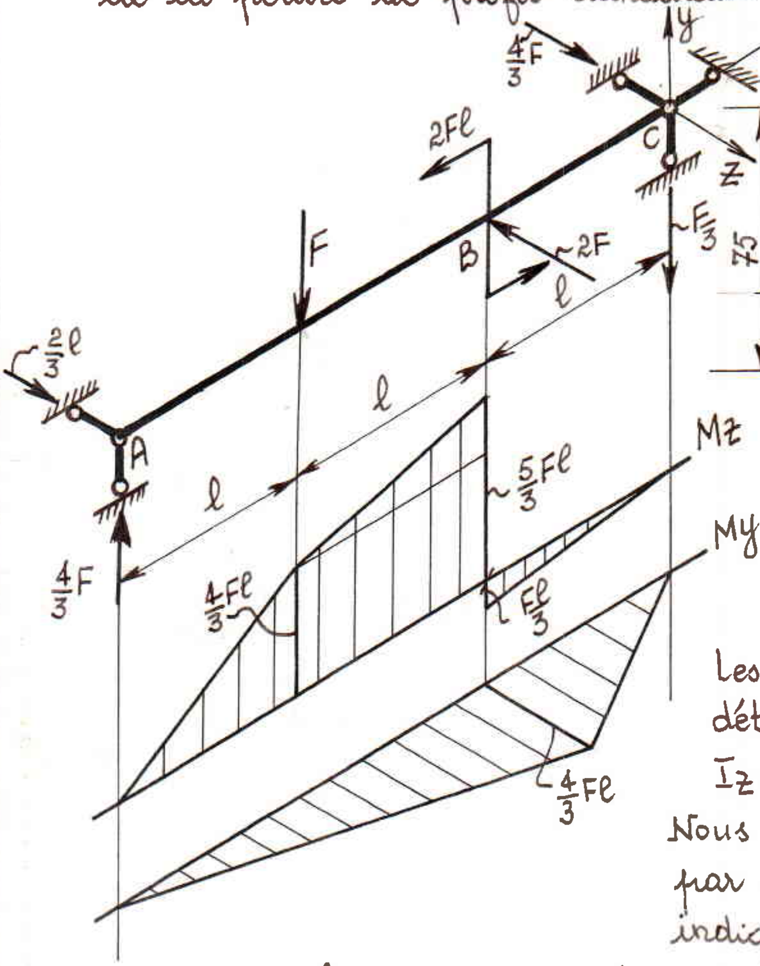
$$\delta_B^H = \frac{1}{EI_y}\left[\left(\frac{1}{2}.2\ell.\frac{4}{3}F\ell\right).\frac{4}{9}\ell + \left(\frac{1}{2}.\ell.\frac{4}{3}F\ell\right).\frac{4}{9}\ell\right] = \frac{48}{54}\,\frac{F\ell^3}{EI_y}$$

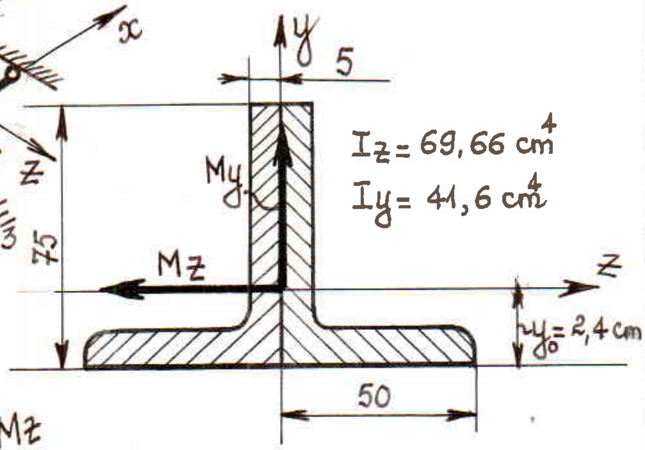
le déplacement total du point "B" est égal à :

$$\delta_t = \sqrt{\delta_B^{H2} + \delta_B^{V2}} = \frac{F\ell^3}{E}\sqrt{\left(\frac{45}{54}\cdot\frac{1}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{48}{54}\cdot\frac{1}{I_y}\right)^2}$$

Exercice 2

Déterminer le coefficient de sécurité et le déplacement du point "B" de la poutre de profil standardisé 75×50×5.





Solution

Les moments d'inerties I_z, I_y sont déterminés par le catalogue :

$I_z = 69,66\ cm^4$; $I_y = 41,6\ cm^4$

Nous calculons les réactions des appuis par les équations d'équilibre que nous indiquons sur la figure.

Nous traçons les diagrammes des moments fléchissants M_z et M_y et nous remarquons que la section "B" est la plus sollicitée.

$$M_z|_B = -\frac{5}{3}F\ell \quad \text{et} \quad M_y|_B = -\frac{4}{3}F\ell$$

La contrainte dans cette section est égale :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y}\cdot z + \frac{M_z}{I_z}\cdot y$$

Position de l'axe neutre :

L'équation de l'axe dans le système de coordonnée choisi est déterminée par la condition ($\sigma_x = 0$) ; $\frac{M_y}{I_y}\cdot z + \frac{M_z}{I_z}\cdot y = 0 \Rightarrow y = -\frac{M_y}{I_y}\cdot\frac{I_z}{M_z}\cdot z$

Substituons M_z et M_y par leurs valeures en "B".

$$y = -\frac{-\frac{4}{3}F\ell \cdot 69,6}{-\frac{5}{3}\ell F \cdot 41,6}\cdot z = -1,34\cdot z$$

Application numerique :

$\ell = 300\ mm$

$F = 2\ KN$

$\sigma_{\text{écoulement compression}} = \sigma_{\text{écoulement traction}} = 240\ MPa$

D $\begin{cases} y_D = -2,39\ cm \\ z_D = -5\ cm \end{cases}$ C $\begin{cases} y_C = 5,11\ cm \\ z_C = 0,5\ cm \end{cases}$

$$\sigma_D = \frac{M_y|_B}{I_y}\cdot z_D + \frac{M_z|_B}{I_y}\cdot y_D \quad ; \quad \sigma_C = \frac{M_y|_B}{I_y}\cdot z_C + \frac{M_z|_B}{I_y}\cdot y_C$$

$$\sigma_D = 130,4\ MPa \quad ; \quad \sigma_C = -84\ MPa$$