CALCUL DES SYSTEMES HYPERSTATIQUES

On entend par système hyperstatique, un système dont on ne peut pas déterminer les réactions des appuis et les forces intérieures à l'aide des seules équations d'équilibres.

La difference entre le nombre d'inconnues et le nombre d'équations de la statique est appeleé degré d'indetermination ou d'hyperstaticité.

on pose :

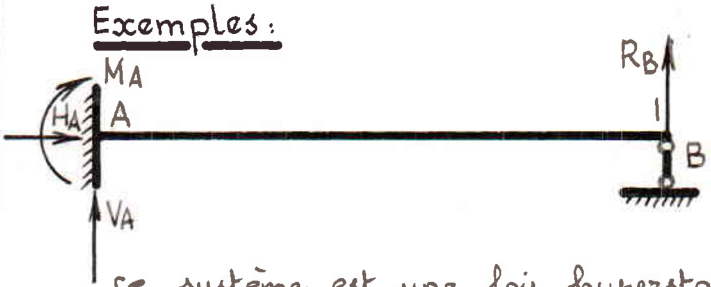
m : nombre d'inconnues

K : nombre d'équation d'équilibre ($K=3$ pour système plan).

n : degré d'hyperstaticité

$$n = m - K$$

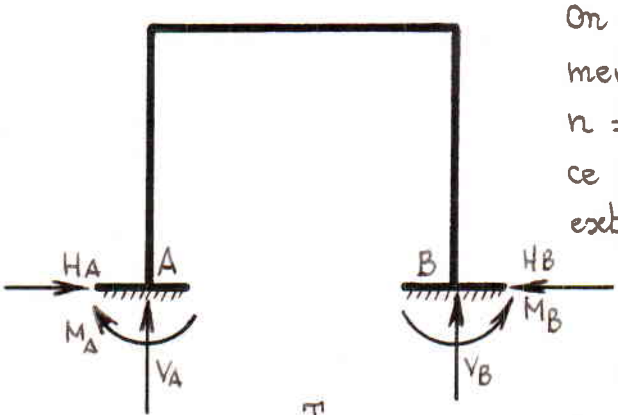
Exemples :



on a dans ce cas 4 inconnues : V_A, H_A, M_A à l'encastrement et R_B en l'appui mobile "B".

$n = m - K = 4 - 3 = 1$

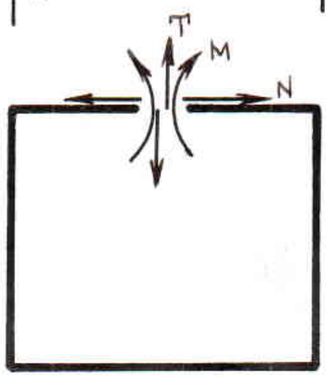
ce système est une fois hyperstatique



On a 3 inconnues sur chaque encastrement : $V_A, H_A, M_A, V_B, H_B, M_B$

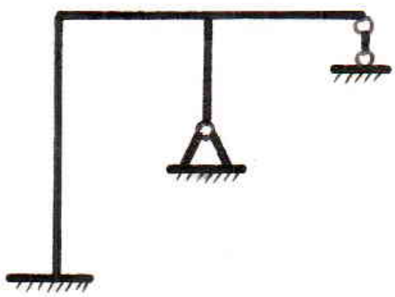
$n = m - K = 6 - 3 = 3$

ce système est hyperstatique d'ordre 3 extérieurement.



Pour connaître le nombre d'inconnues dans un cadre fermé, on fait une section. Nous faisons apparaittre 3 inconnues : M, T, N

Donc le cadre fermé est hyperstatique 3 fois.



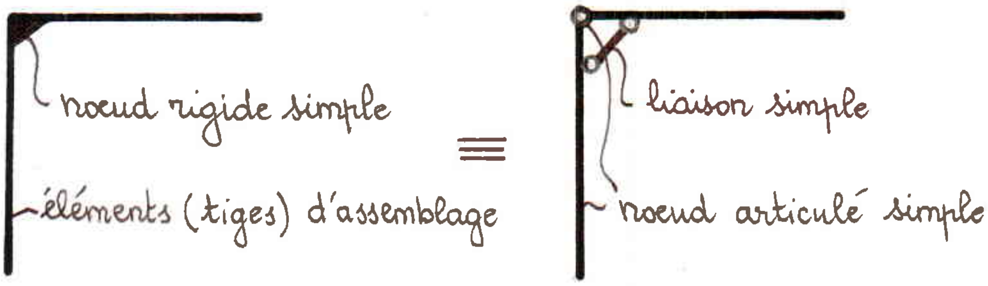
Nombre d'inconnues $m = 6$

$n = m - k = 6 - 3 = 3$

ce système est hyperstatique de degré 3.

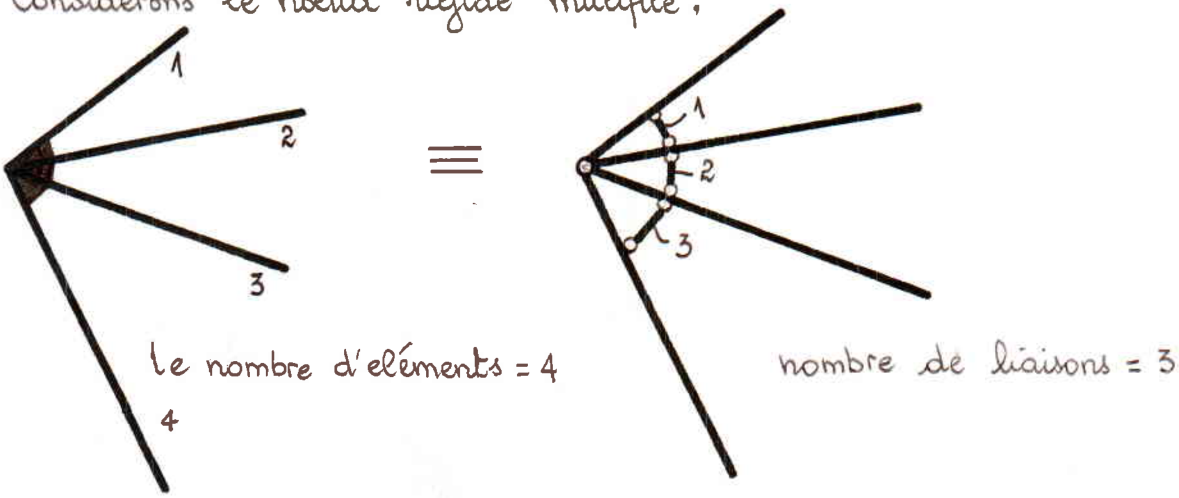
Détermination du dégré d'hyperstaticité des systèmes complexes.

Dans les structures métalliques, l'assemblage des éléments constructifs est fait par l'intermediaire des noeuds articulés et rigides.
Un noeud à deux élements est un noeud simple.
Un noeud à plusieurs éléments est un noeud multiple
Considérons un noeud rigide simple.



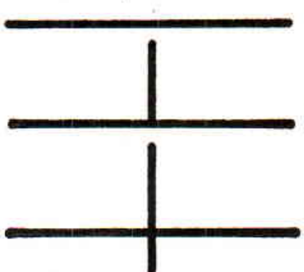
Comme l'indique la construction, le noeud rigide simple est équivalent au noeud articulé simple appuyé par une liaison simple.

Considérons le noeud rigide mulipe.



le nombre de liaisons simples à ajouté au noeud articulé multiple pour former le noeud rigide multiple équivalent est égale aux nombres d'elements d'assemblages moins l'unité.
chaque liaison éliminée diminue le degré d'hyperstaticité une fois.
Donc dans le cas général le nombre d'hyperstaticité est: $n = 3.c - Lé$
c: nombre de contours fermés ; Le: liaison éliminee

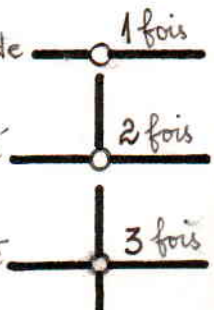
Exemples:



La présence d'articulation diminue l'hyperstaticité de 1 fois

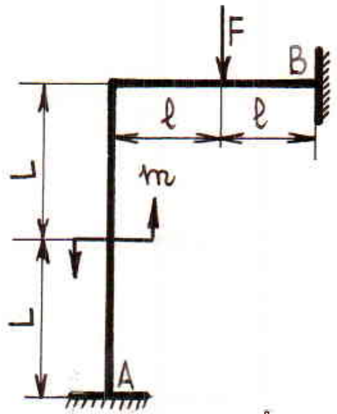
La présence d'articulation diminue l'hyperstaticité 2 fois

La présence d'articulation diminue l'hyperstaticité 3 fois



Méthode des forces de calcul des systèmes hyperstatiques.

On résoud les problèmes des systèmes hyperstatiques par la méthode des forces d'après le schéma suivant.



1. Degré d'hyperstaticité.

On détermine le degré d'hyperstaticité. Soit pour l'exemple présent :

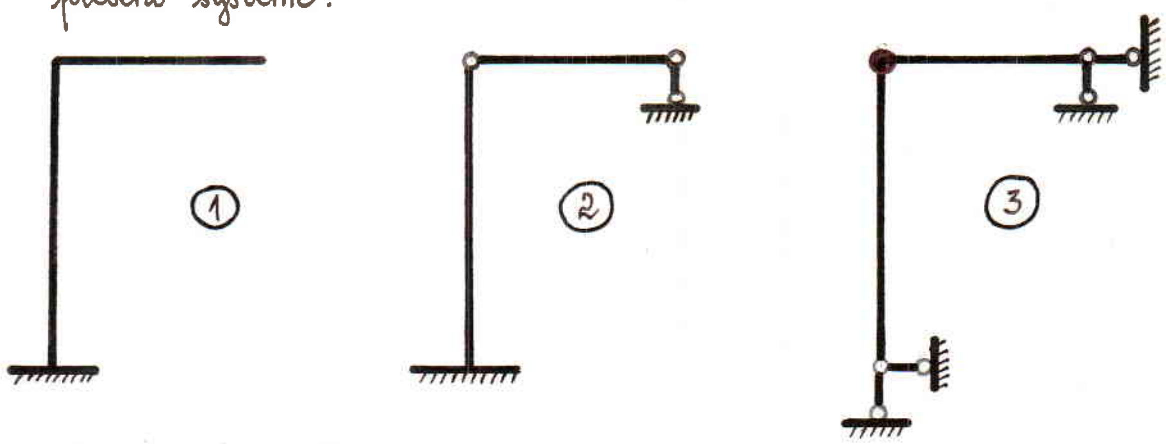
$n = m - K = 6 - 3 = 3$ ou bien $n = 3C - Lé = 3.1 - 0 = 3$

Donc le système est 3 fois hyperstatique, autrement nous avons 3 inconnues superflues ou surabondantes.

2. Système Fondamental.

Le système fondamental est obtenu à partir du système donné par le rejet des inconnues surabondantes et des charges exterieures.

Pour un système hyperstatique donné, on peut proposer plusieurs systèmes fondamentals. Voici quelques variantes de systèmes fondamentals du présent système.

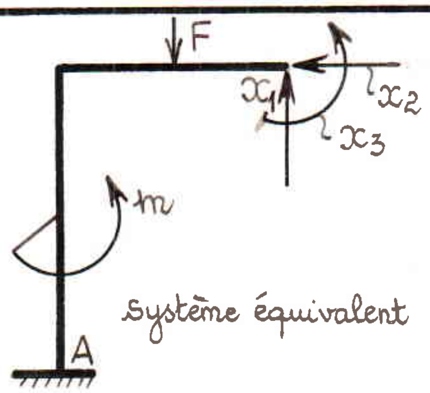


3. Système équivalent.

Le système équivalent au système hyperstatique est le système fondamental sollicité par les forces exterieurs, les inconnues surabondantes et complété par les équations de déformations.

Le système équivalent est statiquement determiné et cinématiquement invariant du système hyperstatique. Ceci veut dire que les déplacements suivants les directions des liaisons rejetées sont nuls.

Choisissons pour l'exemple ci-dessus la variante N°1 à laquelle on ajoute les forces extérieures et les inconnues superflues X_1, X_2 et X_3.



4. Equations des déplacements (canoniques).

Puisque les déplacements à l'encastrement (B) sont nuls, on écrit :

$\delta x_1, x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_1, x_3 + \delta x_1, F = 0$

$\delta x_2 . x_1 + \delta x_2, x_2 + \delta x_2, x_3 + \delta x_2, F = 0$

$\delta x_3, x_1 + \delta x_3, x_2 + \delta x_3, x_3 + \delta x_3, F = 0$

Chacune de ces équations n'expriment que le déplacement nul suivant l'une des directions des trois forces x_1, x_2, x_3 est ~~nul~~.

Par exemple la première équation exprime le déplacement suivant la direction de la force x_1.

le terme $\delta x_1, x_1$: c'est le déplacement suivant la direction de x_1 que provoque la force x_1 sur le système.

le terme $\delta x_1, x_2$: déplacement suivant la direction de x_1 que provoque la force x_2 sur le système, ... etc.

D'une manière générale le premier indice exprime la direction et le deuxième la force.

Développant le système d'équations canoniques par les indices de flexibilité

$\delta_{11} . x_1 + \delta_{12} . x_2 + \delta_{13} . x_3 + \delta_{1F} = 0$

$\delta_{21} . x_1 + \delta_{22} . x_2 + \delta_{23} . x_3 + \delta_{2F} = 0$

$\delta_{31} . x_1 + \delta_{32} . x_2 + \delta_{33} . x_3 + \delta_{3F} = 0$

ou :

δ_{ii} : désigne le déplacement dans la direction "i" dû à la force unitaire appliquée dans la même direction.

δ_{ik} : c'est le déplacement dans la direction "i" dû à la force unitaire appliquée dans la direction K, ($\delta_{ik} = \delta_{ki}$).

δ_{iF} : déplacement suivant la direction "i" dû aux forces extérieurs

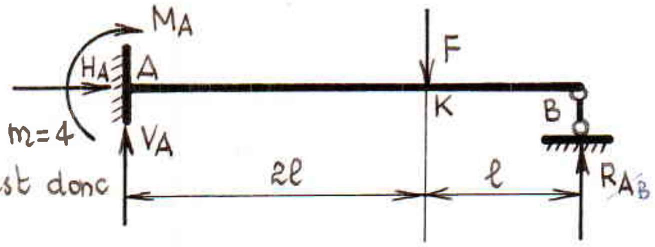
5. Résolution du système d'équations canoniques.

Par la résolution du système d'équations canoniques, nous déterminons, les inconnues surabondantes, par la suite on peut construire les diagrammes des efforts internes dans les sections de la construction et calculer les déplacements des sections.

le nombre d'équations canoniques est egal au nombre d'inconnues superflu

Exercice 1

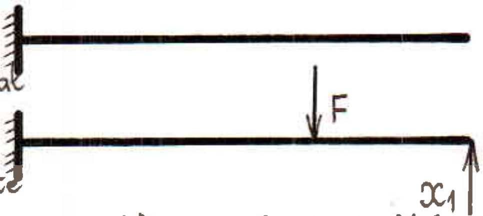
Etant donné : F, ℓ, EI , calculer le déplacement de la section K de la Fig presentée ci-contre.



Solution

Le nombre d'inconnues est m=4 (M_A, H_A, V_A, R_A) le système est donc hyperstatique de degré 1

$$n = m - K = 4 - 3 = 1$$



choisissons un système fondamental auquel on substitue la Force "F" et la force inconnue surabondante x_1, le système est équivalent au système reel dont l'équation canonique s'ecrit:

$$\delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{1F} = 0$$

ou

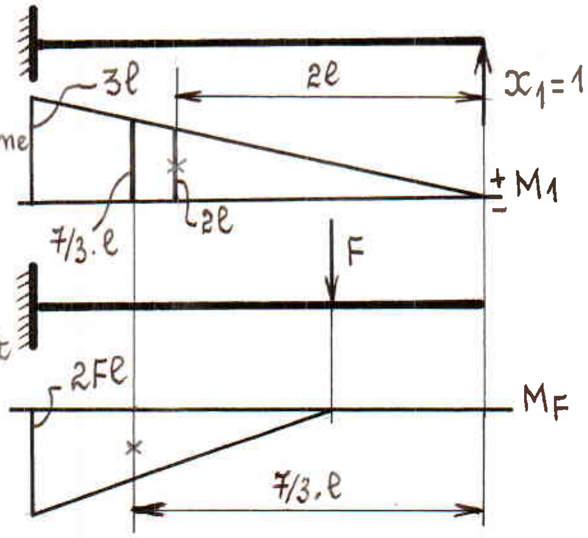
δ_{11} : est le déplacement provoqué par la force unitaire appliqueé en "B" dans la direction de x_1,

δ_{1F} : est le déplacement provoqué par la force extérieure dans la direction de x_1.

L'équation canonique exprime le déplacement total dû à la force extérieure et à la force inconnue x_1 qui doit être égale à zero.

Pour calculer les coefficients δ_{11} et δ_{1F} construisons les diagrammes des moments fléchissants "M_1" dûs à la force unitaire et "M_F" dûs à la force extérieure.

Nous utilisons la méthode de Verechtchaguine.



δ_{11} se détermine en multipliant le diagramme "M_1" par lui même

$$\delta_{11} = M_1 \times M_1 = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 3\ell \cdot 3\ell\right)\frac{2}{3} \cdot 3\ell = 9\frac{\ell^3}{EI}$$

δ_{1F} se détermine en multipliant le diagramme "M_1" par "M_F"

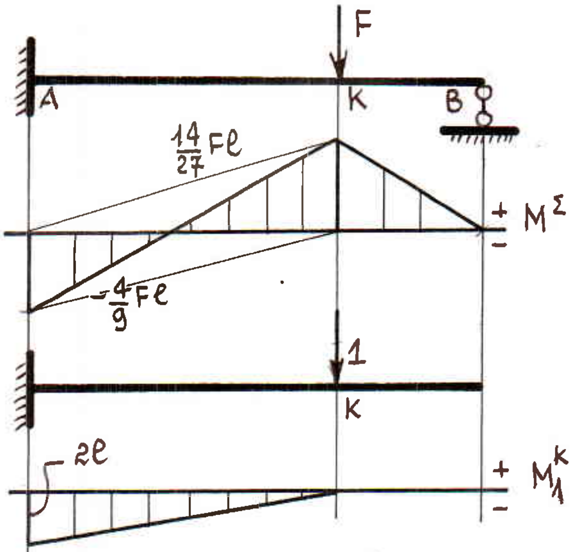
$$\delta_{1F} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 2F\ell \cdot 2\ell\right) \cdot \frac{7}{3}\ell = -\frac{14}{3}\frac{F\ell^3}{EI}$$

Portant δ_{11} et δ_{1F} dans l'équation canonique.

$$9\frac{\ell^3}{EI} \cdot x_1 - \frac{14}{3}\frac{F\ell^3}{EI} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{14}{27} F$$

Construisant maintenant le diagramme des moments fléchissants M^{Σ}.
M^{Σ} est égal à la somme algebrique de "M_F" et de "M_1" multiplié par la valeur de x_1,

$$M^{\Sigma} = M_F + M_1 . x_1$$



$$M_A^{\Sigma} = -2F\ell + 3\ell . \frac{14}{27}\ell F = -\frac{4}{9}F\ell$$

$$M_K^{\Sigma} = 0 + \ell . \frac{14}{27} . F = \frac{14}{27}F\ell$$

$$M_B^{\Sigma} = 0$$

Vérifcation

Dans le système équivalent le déplacement dans la direction de "x_1" est nul. Pour calculer ce déplacement il faut multiplier le diagramme "M_1" avec le diagramme des moments fléchissants M^{Σ}.

$$\delta_B = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{14}{27}.F\ell.\ell.\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}\ell + \left(\frac{14}{27}F\ell.2\ell.\frac{1}{2}\right)\frac{5}{3}\ell - \left(\frac{4}{9}F\ell.2\ell.\frac{1}{2}\right).\frac{7}{3}\ell\right] = 0$$

La condition est donc verifiée.

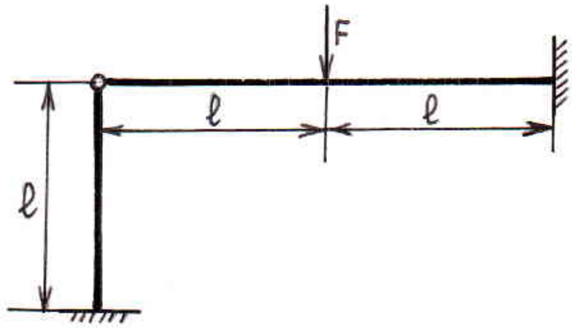
Calcul du déplacement de la section "K".

Pour déterminer "δ_K" par Verichtchaguine, on multiplie le diagramme M^{Σ} par le diagramme des moments fléchissants résultant de la force unitaire appliquée au point "K", soit "M_1^K".

$$\delta_K = \frac{1}{EI}\left[+\left(\frac{4}{9}F\ell.2\ell.\frac{1}{2}\right)\frac{4}{3}\ell - \left(\frac{14}{27}F\ell.2\ell.\frac{1}{2}\right)\frac{2\ell}{3}\right] = \frac{20}{81}.\frac{F\ell^3}{EI}.$$

Exercice 2

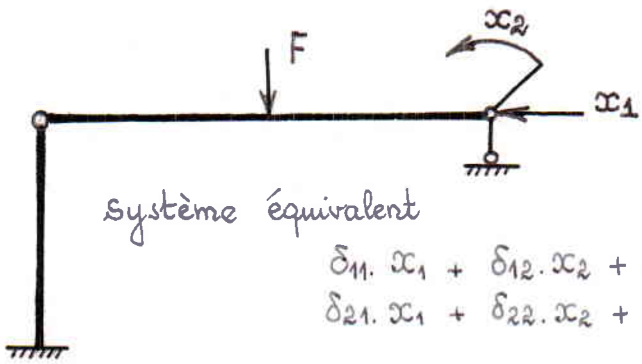
Construire le diagramme des moments fléchissants du cadre représenté ci-dessous. la rigidite en flexion est constante $EI = cte$.



Solution :

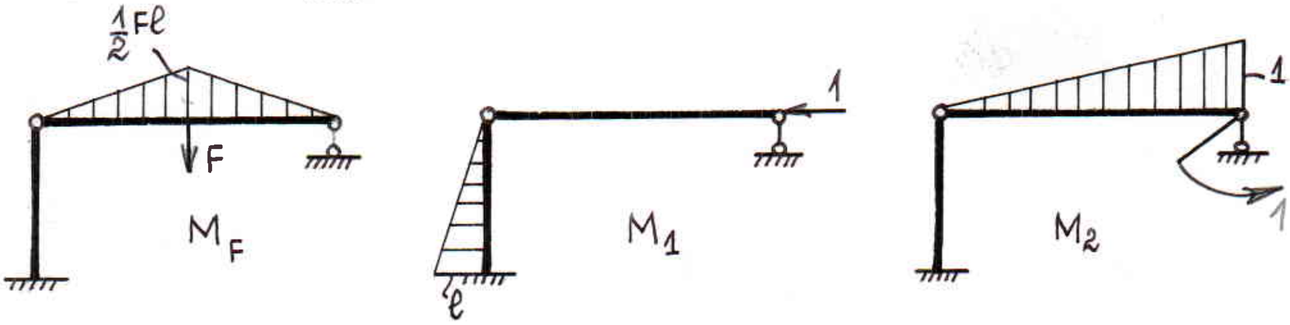
le système est hyperstatique deux fois

Choisissons un système équivalent et construisons les diagrammes des moments fléchissants M^F ; M_1 ; et M_2.



Système équivalent

$$\delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \delta_{1F} = 0$$
$$\delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \delta_{2F} = 0$$



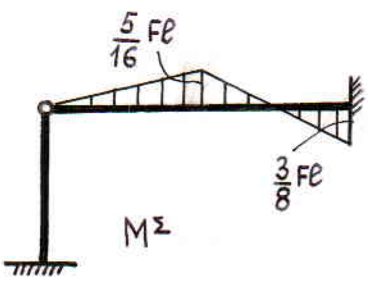
Calculons les coefficients δ_{ij} par Verechtchaguine.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left[\left(\ell \cdot \ell \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3}\ell\right] = \frac{\ell^3}{3EI} \quad ; \quad \delta_{22} = \frac{1}{EI}\left[\left(1 \cdot 2\ell \cdot \frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3}\frac{\ell}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0$$

$$\delta_{1F} = \delta_{F1} = 0$$

$$\delta_{2F} = \delta_{F2} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{F\ell}{2} \cdot 2\ell \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\right] = \frac{F\ell^2}{4EI}$$



Après substitution on trouve :

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -\frac{3}{8} F\ell$$