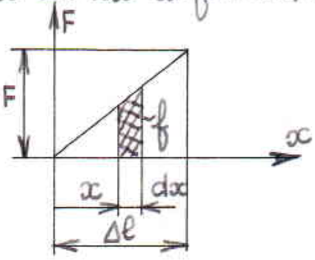
METHODES ENERGETIQUES DE CALCUL DES DEPLACEMENTS

Energie interne de deformation

L'energie potentielle de déformation accumulée dans un corps élastique sollicité par des charges extérieures est égale au travail effectué par ces forces sur les déformations élastiques du corps.

Le travail produit par une force variable dans le cas de déformation élastique est égal à l'aire du diagramme de déformation.

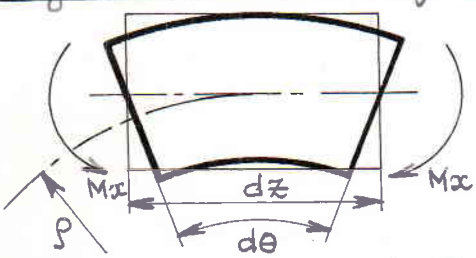
$$A = \int_0^{\Delta\ell} f \cdot dx = \int_0^{\Delta\ell} F \frac{x}{\Delta\ell} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot F \, \Delta\ell$$



Energie dûe à la Force normale

$$dU_N = \frac{1}{2} N \cdot \Delta(dz) = \frac{N^2 \cdot dz}{2ES}$$

Energie dûe au moment fléchissant

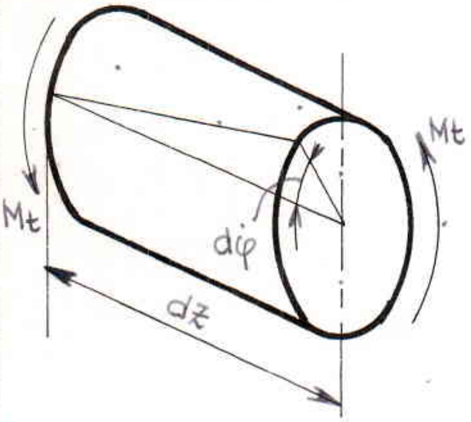


$$dU_{Mx} = \frac{1}{2} Mx \cdot d\theta \quad ; \quad d\theta = \frac{dz}{\rho} = \frac{Mx \cdot dz}{E \cdot Ix}$$

$$dU_{Mx} = \frac{Mx^2 \cdot dz}{2 E \cdot Ix}$$

$$dU_{My} = \frac{My^2 \cdot dz}{2 E \cdot Iy}$$

Energie dûe au moment de Torsion



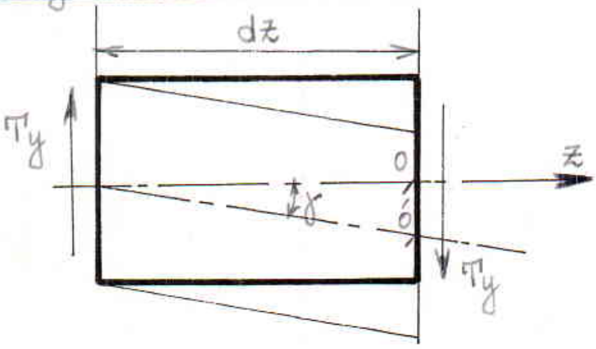
$$dU_{Mt} = \frac{1}{2} \cdot Mt \cdot d\varphi \quad ; \quad d\varphi = \frac{Mt \cdot dz}{G \cdot I_{p,t}}$$

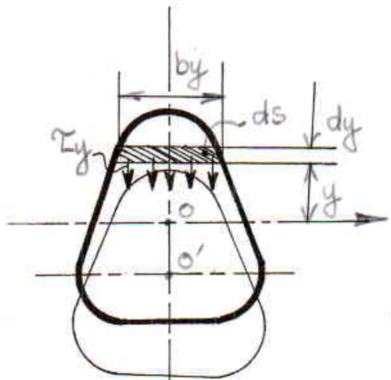
$$dU_{Mt} = \frac{Mt^2 \cdot dz}{2 G I_{p,t}}$$

I_p : moment d'inertie polaire pour section circulaire

I_t : moment d'inertie des sections non circulaires

Energie dûe à l'effort tranchant





Le déplacement du centre de gravité de la section de droite par rapport à celui de la section de gauche est : $oo' = \gamma . dz = \frac{\tau_y}{G} dz$; $\left(\gamma = \frac{\tau}{G}\right)$

Le travail de la force élémentaire $\tau_y . ds$ sur le déplacement (oo') est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\tau_y}{G} . dz\right) . \tau_y . ds .$$

$$du_{T_y} = \frac{1}{2}\int_S \frac{\tau_y^2 . dz}{G} . ds \qquad \text{avec} \quad \tau_y^2 = \frac{T . S_x^*}{I_x . b_y}$$

$$du_{T_y} = \frac{T_y^2 . dz}{2GS} . \frac{S}{I_x^2}\int_S \left(\frac{S_x^*}{b_y}\right)^2 . ds = K_y . \frac{T_y^2 . dz}{2G.S} \quad \text{avec} \quad K_y = \frac{S}{I_x^2}\int_S \left(\frac{S_x^*}{b_y}\right)^2 . ds$$

de la même manière on obtient :

$$du_{T_x} = K_x . \frac{T_x^2 . dz}{2.G.S} \qquad \text{ou} \qquad K_x = \frac{S}{I_y^2}\int_S \left(\frac{S_y^*}{b_x}\right)^2 . ds$$

K_x, K_y : sont des coefficients qui dépendent de la forme de la section

L'energie accumulée dans l'élément de barre dans le cas le plus général de sollicitation est égale aux travaux effectués par les composantes de forces (M_x, M_y, M_z, T_x, T_y, et N) pour les deplacements correspondants:

$$dU = dU_{M_x} + dU_{M_y} + dU_{M_z} + dT_x + dU_{T_y} + dU_N$$

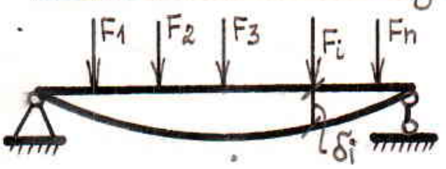
$$du = \frac{M_x^2 . dz}{2EI_x} + \frac{M_y^2 . dz}{2EI_y} + \frac{M_z^2 . dz}{2G.I_p} + \frac{N^2 . dz}{2E.S} + K_x . \frac{T_x^2 . dz}{2G.S} + K_y . \frac{T_y^2 . dz}{2G.S}$$

$$U = \Sigma\int_z \frac{M_x^2 . dz}{2EI_x} + \Sigma\int_z \frac{M_y^2 . dz}{2EI_y} + \Sigma\int_z \frac{M_z^2 . dz}{2G.I_p} + \Sigma\int_z \frac{N^2 . dz}{2ES} + \Sigma\int_z K_x \frac{T_x^2 . dz}{2GS} + \Sigma\int_z K_y \frac{T_y^2 dz}{2GS}$$

Pour un système plan la formule de l'energie de déformation se simplifie ..

$$U = \Sigma\int \frac{M^2 . dz}{2EI} + \Sigma\int \frac{N^2 . dz}{2ES} + \Sigma\int K \frac{T^2 . dz}{2G.S}$$

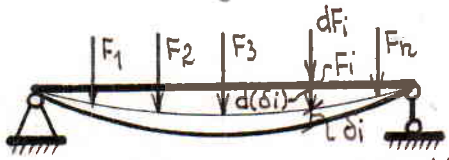
Théorème de Gastigliano.



considerons comme corps élastique une poutre en flexion sollicitée par les forces ($F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$).

δ_i : le déplacement de la poutre au point d'application de la force "F_i".

Lorsque la force "F_i" croit de "dF_i". L'energie potentielle de déformation "U" croit également de la valeur $\frac{\partial U}{\partial F_i} . dF_i$.



Maintenant, appliquons sur la même poutre d'abord une petite force "dF_i" qui provoque un déplacement $d(\delta_i)$. L'energie emmagasinée est : $\frac{1}{2} dF_i . d(\delta_i)$. Appliquons ensuite le même système de force ($F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$) qui provoquait dans la direction de "F_i" un déplacement "δ_i". La force "dF_i" fournit un travail supplementaire, $dF_i . \delta_i$ et l'energie totale sera : $\frac{1}{2} dF_i . d(\delta_i) + U + dF_i . \delta_i$

D'aprés le principe d'indépendance des effets de forces, on écrit :

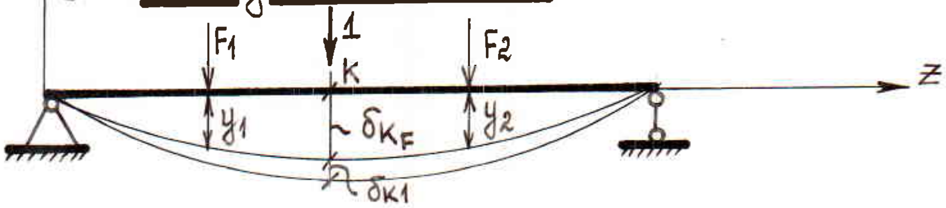
$$U + \frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i = \frac{1}{2} dF_i . d(\delta_i) + U + dF_i . \delta_i$$

D'où $\qquad \delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}$

théorème :

La derivée partielle de l'energie potentielle d'un système par rapport à une force est égale au déplacement du point d'application de cette force suivant sa ligne d'action, $\delta_i = \dfrac{\partial U}{\partial F_i}$. Pour un déplacement angulaire dans la direction du couple M_i , $\theta_i = \dfrac{\partial U}{\partial M_i}$.

Integrale de MOHR



On se propose de déterminer le déplacement vertical de la section droite "δ_K" d'une poutre en flexion chargeé par deux forces F_1, F_2 ,

L'influence de l'effort tranchant en flexion plane est négligeable par rapport à celui du moment fléchissant sur l'energie de déformation.

$U_F = \Sigma \displaystyle\int \frac{M_F^2 . dz}{2\,EI}$ est égale au travail des forces extérieures, soit : $W_F = \frac{1}{2} F_1 . y_1 + \frac{1}{2} F_2 . y_2$

Appliquons ensuite en "K" une force unitaire "$F_K = 1$" qui provoque un déplacement "δ_{K1}". Le travail produit par cette force est: $W_1 = \frac{1}{2} F_K . \delta_{K1} = \frac{1}{2} \delta_{K1}$
ce travail est égal à l'energie de déformation résultant, $U_1 = \Sigma \displaystyle\int \frac{M_1^2 . dz}{2\,EI}$,

Changeons maintenant l'ordre d'application des forces. Appliquons d'abord la force "$F_K = 1$" provoquant une energie de déformation. $W_1 = U_1$

$$\frac{1}{2} \delta_{K1} = \Sigma \int \frac{M_1^2 . dz}{2\,EI}$$

Appliquons ensuite les forces F_1 et F_2, le travail effectué est:

$\frac{1}{2} F_1 . y_1 + \frac{1}{2} F_2\, y_2 + 1 . \delta_{KF}$ et le travail totale sera

$$W_t = \frac{1}{2} F_1 y_1 + \frac{1}{2} F_2 y_2 + 1 . \delta_{KF} + \frac{1}{2} \delta_{K1}$$

et l'energie potentielle totale est:

$$U_t = \Sigma \int \frac{(M_F + M_1)^2}{2\,EI} dz = \Sigma \int \frac{M_F^2}{2EI} dz + \Sigma \int \frac{M_F M_1}{EI} dz + \Sigma \int \frac{M_1^2 . dz}{2\,EI}$$

En égalisant les expréssions de W_t et U_t on obtient : $\delta_{KF} = \Sigma \displaystyle\int \frac{M_F M_1}{EI} dz$

M_F et M_1 sont les moments fléchissants dûes respectivement aux forces extérieures et à la force unitaire de la section en question.

Dans le cas géneral, l'intégrale de MOHR s'ecrit :

$$\delta_{KF} = \Sigma \int \frac{M_x M_{1x}}{EI_x} dz + \Sigma \int \frac{M_y M_{1y}}{EI_y} dz + \Sigma \int \frac{M_t M_{1t}}{GI_p} dz + \Sigma \int \frac{N N_1}{ES} dz + \Sigma \int k_x \frac{T_x T_{1x}}{GS} dz + \Sigma \int k_y \frac{T_y T_{1y}}{G . S} dz$$

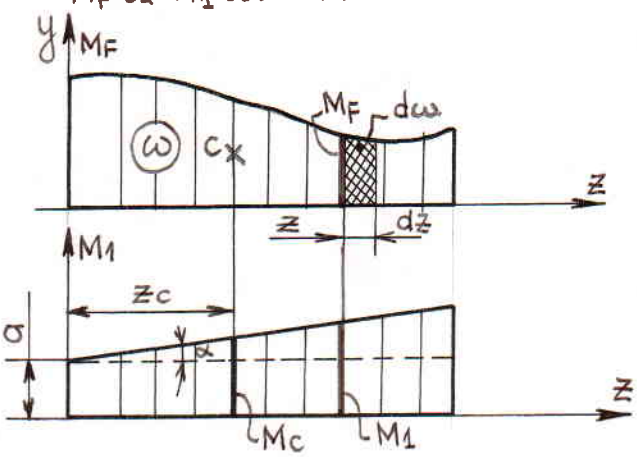
$(M_{1x}, M_{1y}, M_{1t}, N_1, T_{1x}, T_{1y})$: efforts internes dûes aux forces ou aux couples unitaires,

Ordre de calcul des déplacements par l'intégrale de MOHR

Pour trouver le déplacement linéaire, on applique une force unitaire $F=1$ dans la section où l'on cherche le déplacement dans son sens.
Pour trouver le déplacement angulaire d'une section, on applique le moment unitaire.
On calcul les réactions des appuis si c'est nécessaire.
on calcul séparement les efforts internes des sections des différents tronçons dûs aux forces extérieurs et aux forces unitaires.
La régle des signes peut être prise arbitrairement, en effet le signe du déplacement depend seulement du signe du produit des efforts.
on calcul enfin l'intégrale de MOHR
le signe (+) indique que le sens du déplacement coïncide avec le sens de la force unitaire et le contraire.

Méthode grapho-analytique de produit des diagrammes régle de Verechtchaguine

Verechtchaguine propose cette méthode pour simplifier les calculs dans l'intégrale de Mohr lorsque la rigidité EI est constante et l'une des fonctions M_F ou M_1 est linéaire.



Soient M_F et M_1 les diagrammes des forces exterieures et de la force unitaire.
M_1 est linéaire $M_1 = a + z.\,tg\alpha$
$M_c = a + z_c.\,tg\alpha$: moment de la force unitaire correspondand au centre de gravité du diagramme M_F.
calculons l'intégrale de Mohr.

$$\delta_{1F} = \frac{1}{EI}\int_0^L M_F M_1\,dz = \frac{1}{EI}\int_0^L M_F(a + z\,tg\alpha)\,dz$$

A la distance z de l'origine des coordonnées découpons un élément de surface : $d\omega = M_F.\,dz$; $\Rightarrow \delta_{1F} = \frac{1}{EI}\left(a\int_\omega d\omega + tg\alpha\int_\omega z\,d\omega\right)$

$\int_\omega d\omega = \omega$; $\int_\omega z\,d\omega = \omega.z_c$: est le moment statique par rapport à y

$$\delta_{1F} = \frac{1}{EI}\left(a\,\omega + tg\alpha.\,\omega.\,z_c\right) = \frac{\omega}{EI}\left(a + z_c.\,tg\alpha\right) = \frac{\omega.\,M_c}{EI}$$

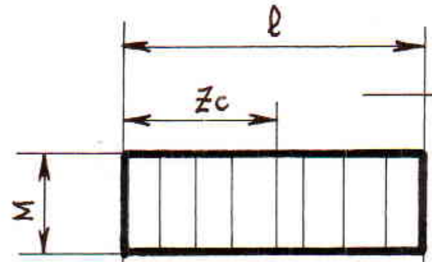
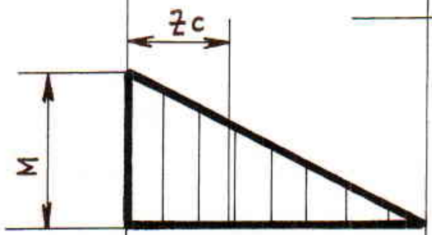
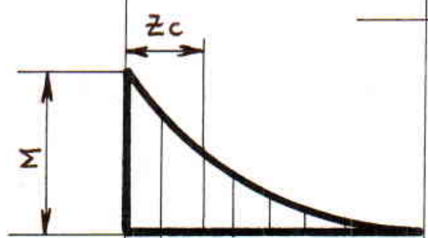
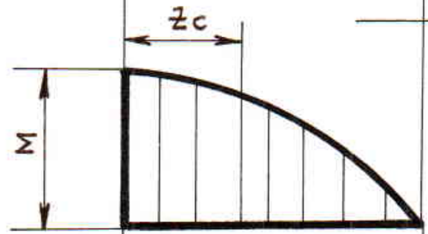
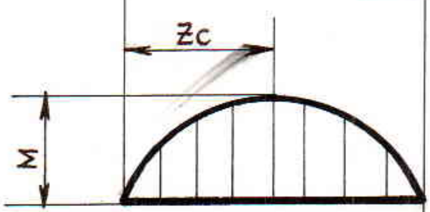
Pour une poutre se composant de "n" tronçons, le déplacement d'une section s'obtient en sommant les produits de Verechtchaguine sur tous les tronçons de la poutre.

$$\delta_{1F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i\,.\,M_{ci}}{EI_i}$$

avec

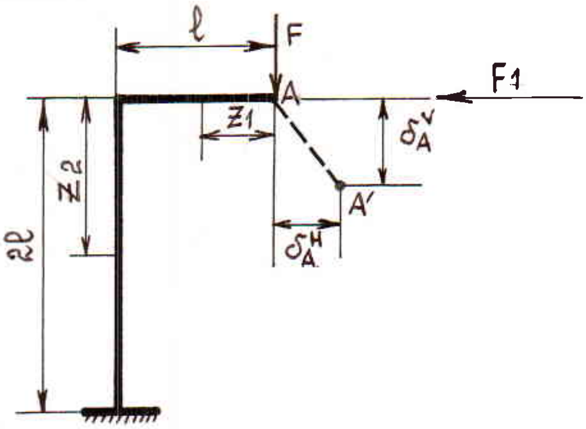
ω : aire de l'épure des moments fléchissants dûs aux forces exterieures.

Mc : valeur du moment fléchissant dû à la force unitaire qui correspond au centre de gravité de l'épure des moments fléchissants des forces exterieures.

		Z_c	ω
	1	$\ell/2$	$M.\ell$
	2	$\ell/3$	$\frac{1}{2} M.\ell$
	3	$\ell/4$	$\frac{1}{3} M.\ell$
	4	$\frac{3}{8}\ell$	$\frac{2}{3} M.\ell$
	5	$\ell/2$	$\frac{2}{3} M.\ell$

Exercice 1

Déterminer le déplacement du point A du demi cadre représenté par la figure, en utilisant le théorème de Castigliano, l'intégrale de Mohr, puis la méthode de Verechtchaguine. La rigidité en flexion de tous les tronçons est considérée comme constante.



Solution

1. D'après le théorème de Castigliano

L'energie de déformation en flexion plane est égale à : $U = \Sigma \int \frac{M^2 dz}{2EI}$

L'influence de l'effort tranchant et de la force normale est négligeable par rapport à celle du moment fléchissant.

D'après Castigliano $\delta = \frac{\partial U}{\partial F_i} = \Sigma \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial F_i}}{E.I} \cdot dz$

le déplacement δ_A se compose de deux deplacements δ_A^H (horizontal) et δ_A^V (vertical).

cherchons le déplacement vertical (δ_A^V): déterminons d'abord les expressions des moments fléchissants dans chaque troncon et calculons leurs dérivées partielles.

Troncon 1 : $0 \leq z_1 \leq \ell$; $M_1 = -F.z_1$; $\frac{\partial M_1}{\partial F} = -z_1$

Troncon 2 : $0 \leq z_2 \leq 2\ell$; $M_2 = -F.\ell$; $\frac{\partial M_2}{\partial F} = -\ell$

$$\delta_A^V = \Sigma \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial F}}{EI} \cdot dz = \frac{1}{EI} \int_0^{\ell} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial F} \cdot dz_1 + \frac{1}{EI} \int_0^{2\ell} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial F} \cdot dz_2$$

$$\delta_A^V = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{\ell} +F.z_1^2 . dz_1 + \int_0^{2\ell} F\ell^2 . dz_2 \right) = \frac{7}{3}\frac{F\ell^3}{EI}$$

cherchons le déplacement horizontal (δ_A^H): En "A" il n'ya aucune force appliqueé dans le sens horizontal. Pour connaitre le déplacement dans le sens horizontal, on applique une force auxiliaire F_1 dans le sens du déplacement cherché puis on l'annule après avoir deriver.

Troncon 1 : $0 \leq z_1 \leq \ell$; $M_1 = -F.z_1$; $\frac{\partial M_1}{\partial F_1} = 0$

Troncon 2 : $0 \leq z_2 \leq 2\ell$; $M_2 = -F\ell + F_1.z_2$; $\frac{\partial M_2}{\partial F_1} = z_2$

$$\delta_A^H = \frac{1}{EI} \int_0^{2\ell} (-F\ell + \underbrace{F_1 . z_2}_{0}) z_2 . dz_2 = \frac{1}{EI} \int_0^{2\ell} -F\ell z_2 . dz_2 = \frac{-F\ell^3 . 2}{EI}$$

Le signe (-) veut dire que le déplacement et dans le sens inverse de F_1.

2. <u>D'après l'intégrale de Mohr.</u>

Expressions des moments fléchissants dûs aux forces extérieures.

Tronçon 1 : $0 \leq z_1 \leq \ell$; $M_1 = -F.z_1$

Tronçon 2 : $0 \leq z_2 \leq 2\ell$; $M_2 = -F.\ell$

Expressions des moments fléchissants dûs à la force unitaire appliqueé en "A" dans le sens vertical, (F = 1).

Tronçon 1 : $0 \leq z_1 \leq \ell$; $\overset{V}{M}{}_1^1 = -1.z_1 = -z_1$

Tronçon 2 : $0 \leq z_2 \leq 2\ell$; $\overset{V}{M}{}_2^1 = -1.\ell = -\ell$

L'intégrale de Mohr dans le cas présent s'écrit :

$$\delta_A^V = \Sigma \int \frac{M_F.M_1}{EI}.dz = \int_0^{\ell} \frac{M_1.\overset{V}{M}{}_1^1}{EI}.dz_1 + \int_0^{2\ell} \frac{M_2.\overset{V}{M}{}_2^1}{EI}.dz_2$$

$$\delta_A^V = \int_0^{\ell} \frac{(-F.z_1)(-z_1)}{EI} dz_1 + \int_0^{2\ell} \frac{(-F.\ell)(-\ell)}{EI} dz_2 = \frac{7}{3}\frac{F\ell^3}{EI}$$

Expressions des moments fléchissants dûs à la force unitaire appliqueé en "A" dans le sens horizontal.

Tronçon 1 : $0 \leq z_1 \leq \ell$; $\overset{H}{M}{}_1^1 = 0$

Tronçon 2 : $0 \leq z_2 \leq 2\ell$; $\overset{H}{M}{}_2^1 = -1.z_2 = -z_2$

$$\delta_A^H = \Sigma \int_0 \frac{M_F M^1}{EI}.dz = \int_0^{\ell} \frac{M_1.\overset{H}{M}{}_1^1}{EI}.dz_1 + \int_0^{2\ell} \frac{M_2.\overset{H}{M}{}_2^1}{EI}.dz_2$$

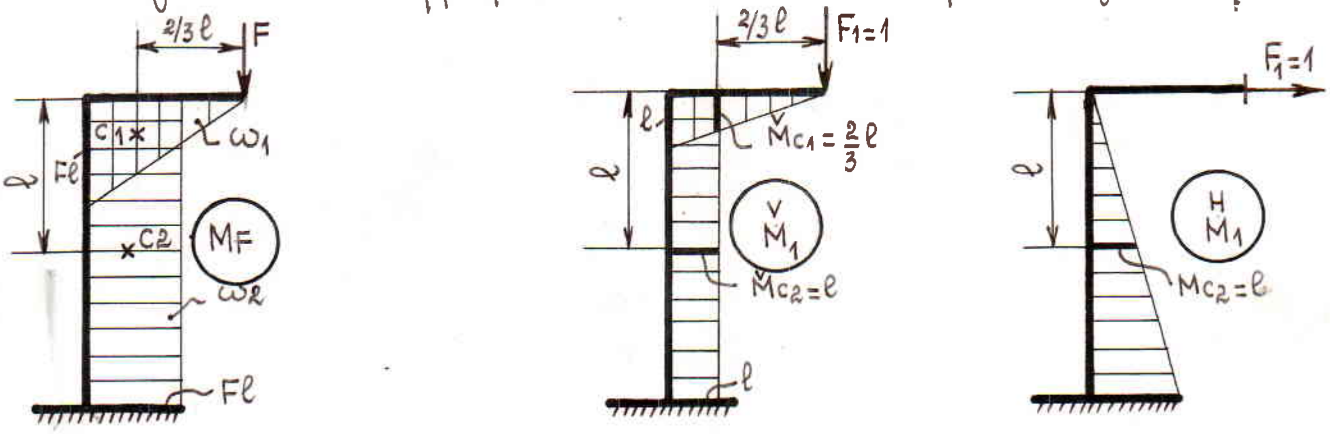
$$\delta_A^H = \int_0^{\ell} \frac{(-F.z_1)(0)}{EI} dz_1 + \int_0^{2\ell} \frac{(-F\ell)(-z_2)}{EI} dz_2 = \frac{2F\ell^3}{EI}$$

le deplacement du point "A" est égale à :

$$\delta_A = \sqrt{(\delta_A^V)^2 + (\delta_A^H)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\frac{F\ell^3}{EI}\right)^2 + \left(\frac{2F\ell^3}{EI}\right)^2} = 3{,}07\frac{F\ell^3}{EI}$$

3. <u>D'après la Methode de Verechtchaguine.</u>

Construisons les diagrammes M_F et $\overset{V}{M}{}_1$ dûs aux forces extérieures et à la force unitaire appliqueé dans le sens vertical puis horizontal.



D'après Verechtchaguine le déplacement vertical du point "A" est égal au produit du diagramme M_F des forces exterieures par le diagramme $\check{M}_1$ de la force unitaire appliquée en "A" dans le sens vertical.

$$\delta_A^V = M_F \times \check{M}_1 = \frac{1}{EI}\left(\omega_1 \cdot \check{M}_{c1} + \omega_2 . \check{M}_{c2}\right)$$

ω_1: aire du diagramme M_F du premier tronçon; $\omega_1 = Fl.l.\frac{1}{2} = Fl^2/2$

ω_2 : aire du diagramme M_F du deuxième tronçon ; $\omega_2 = Fl.2l = 2Fl^2$

$\check{M}_{c1}$: moment sur le diagramme $\check{M}_1$ qui correspond au centre de gravité "C_1" de l'aire "ω_1" du diagramme M_F; $\left(\check{M}_{c1} = \frac{2}{3} l\right)$

$\check{M}_{c2}$: moment fléchissant sur le diagramme $\check{M}_1$ qui correspond au centre de gravité "C_2" de l'aire "ω_2" du diagramme M_F ; $(\check{M}_{c2} = l)$.

$$\delta_A^V = \frac{1}{EI}\left(\frac{Fl^2}{2} . \frac{2}{3} l + 2Fl^2 . l\right) = \frac{7}{3}\frac{Fl^3}{EI}$$

De la même manière on écrit :

$$\delta_A^H = \frac{1}{EI}\left(\omega_1 . \overset{H}{M}_{c1} + \omega_2 . \overset{H}{M}_{c2}\right) = \frac{1}{EI}\left(0 + 2Fl^2 . l\right) = \frac{2Fl^3}{EI}$$

$$\delta_A = \sqrt{(\delta_A^V)^2 + (\delta_A^H)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\frac{Fl^3}{EI}\right)^3 + \left(\frac{2Fl^3}{EI}\right)^2} = 3{,}07 . \frac{Fl^3}{EI}$$

Conclusion :

Nous venons de voir qu'on aboutit au même resultat par les trois méthodes (théorème de Castigliano , Intégrale de Mohr et la methode de verechtchaguine). Donc l'emploi de l'une des trois methodes est valable , seulement il faut utiliser celle qui necessite peu de calcul.